

Ασαφείς Συνεπαγωγές



Κάθε ασαφής ελεγκτής αποτελείται από το *μηχανισμό συμπερασμού ή συμπερασμάτων (inference engine)* με τον οποίο υπολογίζονται οι ~~έξοδοι του ελεγκτή~~. Ο μηχανισμός συμπερασμού ουσιαστικά μας παρέχει την ικανότητα συλλογισμού. Αντίθετα με τα συμβατικά έμπειρα συστήματα, στο μηχανισμό συμπερασμού ενός ασαφούς ελεγκτή διεξάγεται εξονυχιστική ανίχνευση *όλων* των κανόνων στη βάση γνώσης με σκοπό να υπολογιστεί ο ~~βαθμό συμμετοχής ή εκπλήρωσης~~ κάθε κανόνα.



Ασαφείς Συνεπαγωγές

Μια *ασαφής δήλωση συνεπαγωγής* περιγράφει τη σχέση μεταξύ των λεκτικών μεταβλητών του ελεγκτή. Έστω δύο ασαφή σύνολα A και B που ανήκουν στα υπερσύνολα αναφοράς X και Y αντίστοιχα, τότε ορίζουμε μια *ασαφή εξαρτημένη σχέση* (*fuzzy conditional relation*):

$$R : \text{AN } A \text{ TOTE } B = A \rightarrow B \equiv A \times B$$

όπου $A \times B$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο των δύο υπερσυνόλων αναφοράς $X \times Y$ και ορίζεται για την περίπτωση του τελεστή τομής ως:

$$A \times B = \int (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))|(x,y) = \int \min(\mu_A(x), \mu_B(y))|(x,y)$$



Ασαφείς Συνεπαγωγές

Για την περίπτωση αλγεβρικού γινομένου είναι:

$$A \times B = \int (\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)) | (x, y) \\ X \times Y$$

Για παράδειγμα, έστω ότι τα διακριτά σύνολα

$$A = \{1 + 2 + 3\} \text{ και } B = \{1 + 2 + 3 + 4\}$$

με αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής

$$\{\mu_A(x) | x\} = (1 | 1 + 0,7 | 2 + 0,2 | 3) \quad \text{και}$$

$$\{\mu_B(y) | y\} = (0,8 | 1 + 0,6 | 2 + 0,4 | 3 + 0,2 | 4)$$



Καρτεσιανό Γινόμενο

Τότε το καρτεσιανό γινόμενο (*Cartesian product*) τομής είναι:

$$\begin{aligned} R_A = A \times B &= \{ \min(1, 0,8)|(1,1), \min(1, 0,6)|(1,2), \\ &\quad \min(1, 0,4)|(1,3), \min(1, 0,2)|(1,4), \\ &\quad \min(0,7, 0,8)|(2,1), \min(0,7, 0,6)|(2,2), \\ &\quad \min(0,7, 0,4)|(2,3), \min(0,7, 0,2)|(2,4), \dots \\ &= \{ 0,8|(1,1) + 0,6|(1,2) + 0,4|(1,3) + 0,2|(1,4) + \\ &\quad 0,7|(2,1) + 0,6|(2,2) + 0,4|(2,3) + 0,2|(2,4) + \\ &\quad 0,2|(3,1) + 0,2|(3,2) + 0,2|(3,3) + 0,2|(3,4) \dots \end{aligned}$$



Σχεσιακός Πίνακας

Ο αντίστοιχος σχεσιακός πίνακας (*relational matrix*) είναι:

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	0,8	0,6	0,4	0,2
2	0,7	0,6	0,4	0,2
3	0,2	0,2	0,2	0,2

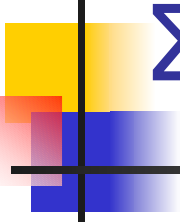


Καρτεσιανό Αλγεβρικό Γινόμενο

Το καρτεσιανό αλγεβρικό γινόμενο, είναι αντίστοιχα:

$$R_* = A \times B = \{0,8|(1,1) + 0,6(1,2) + 0,4|(1,3) + 0,2|(1,4) + \\ 0,56|(2,1) + 0,42|(2,2) + 0,28|(2,3) + 0,14|(2,4) + \\ 0,16|(3,1) + 0,12|(3,2) + 0,08|(3,3) + 0,04|(3,4)\}$$

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	0,8	0,6	0,4	0,2
2	0,56	0,42	0,28	0,14
3	0,16	0,12	0,08	0,04



Σχέση Συνεπαγωγής

Το καρτεσιανό γινόμενο τομής (*min*) είναι απλούστερο να υλοποιηθεί και ταχύτερο στην εκτέλεσή του σε υπολογιστή εφόσον χρησιμοποιεί την πράξη σύγκρισης αντί του γινομένου, πράξη που είναι χρονοβόρα. Στην πράξη οι περισσότεροι ασαφείς ελεγκτές υιοθετούν τη μέθοδο αυτή.

Έλεγχος Διαδικασιών με Ασαφείς

Ελεγκτές

Ο έλεγχος διαδικασιών με ασαφείς ελεγκτές προϋποθέτει την ύπαρξη ενός **συνόλου λεκτικών κανόνων** που περιγράφει τις πράξεις ενός εμπειρογνώμονα χειριστή. Οι κανόνες αυτοί είναι όμοιοι με αυτούς με τους οποίους εκπαιδεύονται οι χειριστές και στη συνέχεια εφαρμόζουν στην πράξη. Το σύνολο των λεκτικών κανόνων αποθηκεύεται στη βάση γνώσης (*rule base*) του ελεγκτή. Φυσικό είναι να μην είναι γνωστοί όλοι οι κανόνες που είναι απαραίτητοι να αντιμετωπίσουν όλες τις καταστάσεις της ελεγχόμενης διαδικασίας.

➤ Συνεπώς ζητείται κάποιος μηχανισμός που θα είναι ικανός να συμπεράνει αποφάσεις με ελλιπή στοιχεία, όπως ακριβώς κάνει ένας άνθρωπος-χειριστής. Η ασαφής λογική είναι η πιο διαδεδομένη τεχνική για την εξεύρεση αποφάσεων κάτω από αυτές τις συνθήκες.



Ορισμός της Συνεπαγωγής

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η γνώση για τον έλεγχο μιας διαδικασίας συνήθως καθορίζεται από ένα σύνολο κανόνων της μορφής ‘ΑΝ (αίτιο) ΤΟΤΕ (συμπέρασμα)’ ή ΑΝ A ΤΟΤΕ B . Σημειώνουμε ότι στον κλασικό προτασιακό λογισμό (*propositional calculus*) η σχέση:

$$\text{ΑΝ } A \text{ ΤΟΤΕ } B$$

που μπορούμε να εκφράσουμε συμβολικά ως:

$$A \rightarrow B$$

είναι ισοδύναμη με την πράξη $\bar{A} \vee B$ όπου A και B είναι υποσύνολα των υπερσυνόλων X και Y αντίστοιχα.



Generalised Modus Ponens

Στην ασαφή λογική υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες κανόνων συνεπαγωγής. Η πρώτη είναι η κατηγορία *Generalised Modus Ponens* (ή *GMP*) για την οποία ισχύουν τα εξής:

GMP: Υπόθεση 1: x είναι A ’

Υπόθεση 2: $\text{AN } x \text{ είναι } A \text{ TOTE } y \text{ είναι } B$

Συμπέρασμα: y είναι B ’

Ο κανόνας αυτός συσχετίζεται άμεσα με τους μηχανισμούς *πρόσθιας συνεπαγωγής με δεδομένα* (*forward data-driven inference*), που βρίσκει εφαρμογή σε όλους τους ασαφείς ελεγκτές.



Generalised Modus Tollens

Η δεύτερη είναι η κατηγορία *Generalised Modus Tollens* (ή *GMT*) για την οποία ισχύουν τα εξής:

GMT: Υπόθεση 1: y είναι B ’

Υπόθεση 2: $\text{AN } x \text{ είναι } A \text{ TOTE } y \text{ είναι } B$

Συμπέρασμα: x είναι A ’

Ο κανόνας *GMT* σχετίζεται στενά με τους μηχανισμούς *οπισθόδρομου συμπερασμού με στόχο* (*backwards goal-driven*) που συνηθίζεται στα έμπειρα συστήματα. Αντίθετα με τον κανόνα *GMP*, ο σκοπός του μηχανισμού συμπερασμού εδώ είναι η ανεύρεση των αιτιών που έχουν ένα δεδομένο αποτέλεσμα.



Συνεπαγωγή Mamdani

Η συνεπαγωγή *Mamdani*

χρησιμοποιεί μόνο τον τελεστή *min* και ορίζεται ως:

$$R_{Mamdani} = A \times B$$

και

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$



Συνεπαγωγή Larsen

Η συνεπαγωγή *Larsen* χρησιμοποιεί το αριθμητικό γινόμενο κατά τον υπολογισμό του καρτεσιανού γινομένου και ορίζεται ως:

$$R_{Larsen} = A \times B$$

και

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)$$



Συνθετικός Κανόνας

Όταν χρησιμοποιούνται διακριτά σύνολα οι παραπάνω πράξεις είναι ισοδύναμες με το εσωτερικό γινόμενο δύο πινάκων, εφόσον ο πολλαπλασιασμός αντικατασταθεί με τον τελεστή \min και η πρόσθεση με τον τελεστή \max . Συνεπώς με ορισμούς συνεπαγωγής που περιέχουν μόνο τους τελεστές \max και \min χρησιμοποιούμε το **συνθετικό κανόνα** (*compositional rule*) **$\max\text{-}\min$** και με ορισμούς συνεπαγωγής που περιέχουν αριθμητικούς τελεστές, χρησιμοποιούμε το συνθετικό κανόνα **$\max\text{-product}$** .

Παράδειγμα

. Για παράδειγμα ο κανόνας:

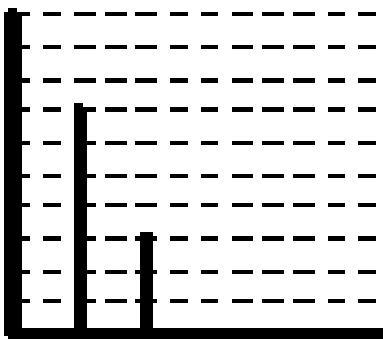
‘ΑΝ A είναι *αργός* ΤΟΤΕ B είναι *ταχύς*’

όπου τα σύνολα αργός και ταχύς ορίζονται από τα διακριτά σύνολα:

$$\mu_A(x) = \{1 + 0, 7 + 0, 3 + 0 + 0 + 0\} \text{ και}$$

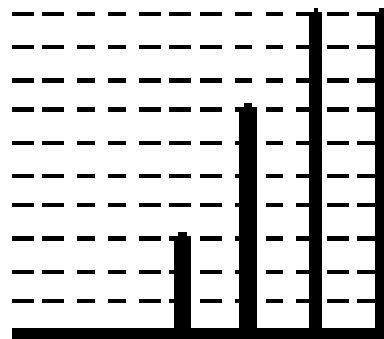
$$\mu_B(y) = \{0 + 0 + 0, 3 + 0, 7 + 1 + 1\}$$

μ_A



x

μ_B



y



Παράδειγμα

Το καρτεσιανό γινόμενο με τελεστή *min* δίνεται στον

$$R_A = A \times B = \{\min[\mu_A(x_i), \mu_B(y_j)]\} =$$

$\min[1, 0]$	$\min[1, 0]$	$\min[1, 0, 3]$	$\min[1, 0, 7]$	$\min[1, 1]$	$\min[1, 1]$
$\min[0, 7, 0]$	$\min[0, 7, 0]$	$\min[0, 7, 0, 3]$	$\min[0, 7, 0, 7]$	$\min[0, 7, 1]$	$\min[0, 7, 1]$
$\min[0, 3, 0]$	$\min[0, 3, 0]$	$\min[0, 3, 0, 3]$	$\min[0, 3, 0, 7]$	$\min[0, 3, 1]$	$\min[0, 3, 1]$
$\min[0, 0]$	$\min[0, 0]$	$\min[0, 0, 3]$	$\min[0, 0, 7]$	$\min[0, 1]$	$\min[0, 1]$
$\min[0, 0]$	$\min[0, 0]$	$\min[0, 0, 3]$	$\min[0, 0, 7]$	$\min[0, 1]$	$\min[0, 1]$
$\min[0, 0]$	$\min[0, 0]$	$\min[0, 0, 3]$	$\min[0, 0, 7]$	$\min[0, 1]$	$\min[0, 1]$



Παράδειγμα

	0	0	0,3	0,7	1	1
	0	0	0,3	0,7	0,7	0,7
=	0	0	0,3	0,3	0,3	0,3
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

Νεο παράδειγμα Συνεπαγωγή με το συνθετικό κανόνα *max-product*

Για σύγκριση, υπολογίζονται παρακάτω τα στοιχεία της συνάρτησης συμμετοχής $\mu_B(y)$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα *max-product*:

$$\mu_B(y) = \max(\mu_B(x) * \mu_{R1}(y))$$

η διακριτή συνάρτηση συμμετοχής $\mu_B(y)$ του επακόλουθου B για τα νέα αίτια.

Η συνεπαγωγή με τον τελεστή πολλαπλασιασμού είναι αντίστοιχα:

$$R_* = A \times B = \{\mu_A(x_i) * \mu_B(y_j)\} =$$

[1* 0]	[1* 0]	[1* 0,3]	[1* 0,7]	[1* 1]	[1* 1]
[0,7* 0]	[0,7* 0]	[0,7*0,3]	[0,7*0,7]	[0,7* 1]	[0,7* 1]
[0,3* 0]	[0,3* 0]	[0,3*0,3]	[0,3* 0,7]	[0,3* 1]	[0,3* 1]
[0* 0]	[0* 0]	[0* 0,3]	[0* 0,7]	[0* 1]	[0* 1]
[0* 0]	[0* 0]	[0* 0,3]	[0* 0,7]	[0* 1]	[0* 1]
[0* 0]	[0* 0]	[0* 0,3]	[0* 0,7]	[0* 1]	[0* 1]



Πλεονεκτήματα Ασαφούς Λογικής

- Ευκολία στην αναπαράσταση της γνώσης εμπειρογνώμονα και κοινότυπου συλλογισμού.
- Χρήση λεκτικών όρων
- Ανεκτικότητα σε ανακριβή γνώση



Μειονεκτήματα Ασαφούς Λογικής

- Λιγότερο αποδοτική από τα αντίστοιχα μοντέλα που χρησιμοποιούν ακριβή αναπαράσταση
- Δυσκολία στον καθορισμό των συναρτήσεων συμμετοχής
- Δεν υπάρχει αυστηρός τρόπος εγκυρότητας